24/04/17

Μάθημα 7ο

$$z_j - c_j = \underline{w}'\underline{P_j} - c_j = (w_1, \dots, w_m)\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} - c_j = a_{1j}w_1 + a_{2j}w_2 + \dots + w_m a_{mj} - c_j$$

ΘΕΩΡΗΜΑ (Συμπληρωματικής χαλαρότητας)

$\hat{\underline{x}}$, $\hat{\underline{w}}$ είναι άριστες λύσεις των (Π) και (Δ) αντίστοιχα.

$\hat{x}_i(a_{1i}w_1 + \dots + a_{mi}w_m - c_i) = 0$

$\hat{w}_i(a_{i1}\hat{x}_1 + \dots + a_{in}\hat{x}_n - b_i) = 0$

$\underline{\hat{w}}' = \underline{c_B}'B^{-1}$, $\underline{\hat{w}}'B = \underline{c_B}'$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

	(Π)	(Δ)
	$\max 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$	$\min 48w_1 + 8w_2 + 20w_3$
w_1	$8x_1 + 6x_2 + x_3$ (ξυλεία)	$8w_1 + 2w_2 + 4w_3 \geq 60$
w_2	$2x_1 + 15x_2 + 0.5x_3$ (κατασκευή)	$6w_1 + 1.5w_2 + 2w_3 \geq 30$
w_3	$4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3$ (φινίρισμα)	$w_1 + 0.5w_2 + 1.5w_3 \geq 20$
	$x_1, x_2, x_3 \geq 0$	$w_1, w_2, w_3 \geq 0$

Π

$x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 8$, $z = 280$

$8w_1 + 2w_2 + 4w_3 = 60$

$w_1 + 0.5w_2 + 1.5w_3 = 20$

$w_1 \overset{v}{=} 0$, $w_2 = w_3 = 10$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: (Π)

	(Π)	
	$\max 4x_1 + 2x_2 + 3x_3$	$\min 12w_1 + 10w_2 + 10w_3$
w_1	$2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 12$	$2w_1 + w_2 + 3w_3 \geq 4$
w_2	$x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 10$	$3w_1 + 4w_2 + w_3 \geq 2$
w_3	$3x_1 + x_2 + x_3 \leq 10$	$w_1 + 2w_2 + w_3 \geq 3$
	$x_1, x_2, x_3 \geq 0$	$w_1, w_2, w_3 \geq 0$

$x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 4$

$2w_1 + w_2 + 3w_3 = 4$

$w_1 + 2w_2 + w_3 = 3$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (χωρίς Simplex)

$\max 10x_1 + 6x_2 - 4x_3 + x_4 + 12x_5$

$w_1 \quad 2x_1 + x_2 + x_3 \quad + 3x_5 = 18$

$w_2 \quad x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 6$

$x_i \geq 0$

$\min 18w_1 + 6w_2$

$2w_1 + w_2 \geq 10$

$w_1 + w_2 \geq 6$

$w_1 - w_2 \geq -4$

$w_2 \geq 1$

$3w_1 + 2w_2 \geq 12$

$w_1, w_2 \geq 0$

$w_1 = 2,\ w_2 = 6,\ u = 72$

$x_1, x_3 \geq 0$

$x_2 = x_4 = x_5 = 0$

$2x_1 + x_3 = 18 \quad | \quad x_1 = 8$

$x_1 - x_3 = 6 \quad | \quad x_3 = 2$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

1)

			6	3
B	C_B	b	P_2	P_3
P_4	0	-3	3	-2
P_1	2	4	5	2
		8	4	1

2)

B	C_B	b	P_2	P_4
P_3	3	3/2	-3/2	-1/2
P_1	2	1	8	1
		13/2	14/2	1/2

1)

			2	6	3	0
B	C_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4
P_4	0	-3	0	3	-2	1
P_1	2	4	1	5	2	0
		8	0	4	1	0

$\max 2x_1 + 6x_2 + 3x_3$

$3x_2 - 2x_3 + x_4 = -3$

$x_1 + 5x_2 + 2x_3 \quad = 4$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

(Π)

$\max 2x_1 + 6x_2 + 3x_3$

$w_1 \quad 3x_2 - 2x_3 \leq -3$

$w_2 \quad x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 4$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

(Δ)

$\min -3w_1 + 4w_2$

$3w_1 + 5w_2 \geq 6$

$w_2 \geq 2$

$-2w_1 + 2w_2 \geq 3$

$w_1 \geq 0,\ w_2 \in \mathbb{R}$

2)

B	C_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4
P_3	3	3/2	0	-3/2	1	-11/2
P_1	2	1	1	8	0	1
		13/2	0	11/2	0	1/2

$w_1 = \frac{1}{8} + 0$

$w_2 = 0 + 8 = 8$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

			-1	2	-3	0	0	0
B	C_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_1	-1	11	1	-1/2	1	1	0	0
P_5	0	0	0	2	-1	0	1	0
P_6	0	8	0	0	0	2	0	1
	Z	-11	0	-3/2	2	-1	0	0

P_1	-1	7	1	0	3/4	0	1/4	-1/2
P_2	2	0	0	1	-1/2	0	1/2	0
P_4	0	4	0	0	0	1	0	1/2
	Z	-7	0	0	5/4	0	3/4	1/2

$\max -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 0x_4$

$x_1 - 1/2\,x_2 + x_3 + x_4 = 11$

$2x_2 - x_3 \leq 0$

$2x_4 \leq 8$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

$\min 11w_1 + 8w_2$

$w_1 \geq -1$

$-1/2\,w_1 + 2w_2 \geq 2$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

			1	1	0	0	0	-M
B	C_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_6	-M	1	1	1	-1	0	0	1
P_4	0	1	1	-1	0	1	0	0
P_5	0	1	-1	1	0	0	1	0
		-M	-1-M	-1-M	M	0	0	0

B	C_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_1	1	1	1	-1	0	1	0	0
P_3	0	0	0	-2	1	1	0	-1
P_5	0	2	0	0	0	1	1	0
		1	0	-2	0	1	0	M

$\max x_1 + x_2$

$x_1 + x_2 \geq 1$

$x_1 - x_2 \leq 1$

$-x_1 + x_2 \leq 1$

$x_1, x_2 \geq 0$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

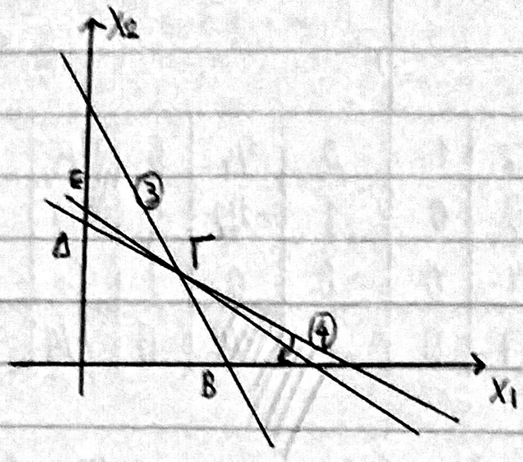
$\max 3x_1 + 5x_2$

$2x_1 + x_2 \leq 230 \quad (3)$

$x_1 + 2x_2 \leq 250 \quad (4)$

$x_2 \leq 120 \quad \Gamma$

$x_1, x_2 \geq 0 \quad (1),(2)$



$$-2 < -\frac{c_1}{c_2} < -0.5$$

$c_2 = 5$

$$-2 < -\frac{c_1}{5} < -0.5$$

Διακύμανση ευαισθησίας

x_k είναι μια εκ των μη βασικών μεταβλητών

$z_k - (c_k + \Delta c_k) > 0 \Rightarrow \Delta c_k < z_k - c_k$

x_{Br} βασική μεταβλητή

$\hat{c}_B = (c_{B1}, c_{B2}, \ldots, c_{Br} + \Delta c_{Br}, \ldots, c_{Bm})$

$\hat{z}_j - c_j = \hat{c}_B B^{-1} P_j - c_j > 0, \ \forall j$

$$\underline{c_B}' B^{-1} \underline{D} + (0, \ldots, c_{Br}, \ldots, 0) \begin{pmatrix} y_{1j} \\ y_{rj} \\ y_{mj} \end{pmatrix} - c_j \geq 0$$

$$= z_j - c_j + \Delta c_{Br} y_{rj} \geq 0$$

$$\Delta c_{Br} y_{rj} \geq -(z_j - c_j)$$

$$y_{rj} > 0 : \quad \Delta c_{Br} > \frac{-(z_j - c_j)}{y_{rj}}$$

$$\forall j$$

$$y_{rj} < 0 : \quad \Delta c_{Br} < \frac{-(z_j - c_j)}{y_{rj}}$$

$$\max_j \left\{ \frac{-(z_j - c_j)}{y_{rj}}, \ y_{rj} > 0 \right\} \leq \Delta c_{Br} \leq \min_j \left\{ \frac{(-z_j + c_j)}{y_{rj}}, \ y_{rj} < 0 \right\}$$

$\underline{x_B}$

$$\underline{\hat{b}} = \underline{b} + \Delta b_k \underline{e_k}$$

$$\underline{\hat{x}_B} = B^{-1} \underline{\hat{b}} = B^{-1} \underline{b} + B^{-1} \Delta b_k \underline{e_k}$$

$$\underline{\hat{x}_B} \geq 0$$

$$x_{Bi} + \Delta b_k y_{ik} \geq 0, \ \forall i$$

i) $y_{ik} < 0, \quad \Delta b_k < -\dfrac{x_{Bi}}{y_{ik}}$

$y_{ik} > 0, \quad \Delta b_k > -\dfrac{x_{Bi}}{y_{ik}}$

$$\max_i \left\{ -\frac{x_{Bi}}{y_{ik}}, \ y_{ik} > 0 \right\} \leq \Delta b_k \leq \min_i \left\{ -\frac{x_{Bi}}{y_{ik}}, \ y_{ik} < 0 \right\}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

$\max \{ z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3 \}$

$8x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 48$ (ξυλεία)

$2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 \leq 8$ (κατασκευή)

$4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 \leq 20$ (φινίρισμα)

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Βέλτιστο tableau

B	C_B	b	$\overset{60}{P_1}$	$\overset{30}{P_2}$	$\overset{20}{P_3}$	$\overset{0}{P_4}$	$\overset{0}{P_5}$	P_6
P_4	0	24	0	-2	0	1	-8	2
P_1	60	2	1	1.25	0	0	1.5	-0.5
P_3	20	8	0	-2	1	0	-4	2
	z	280	0	5	0	0	10	10

όχι αυστηρά μαθηματικά

$C_B \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 60+\Delta c_1 \\ 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1.25 \\ -2 \end{pmatrix}$ Άρα, $(60+\Delta c_1)\cdot 1.25 - 40 - 30 \geq 0$
$\Rightarrow \Delta c_1 \geq -4$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 60+\Delta c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 \\ 1.5 \\ -4 \end{pmatrix}$ Άρα, $(60+\Delta c_1)\, 1.5 - 4\cdot 20 \geq 0 \Rightarrow \Delta c_1 \geq -20/3$

, $\begin{pmatrix} 0 \\ 60+\Delta c_1 \\ 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -0.5 \\ 2 \end{pmatrix} \geq 0$ Άρα, $\Delta c_1 \leq 20$
Οπότε $-4 \leq \Delta c_1 \leq 20$

Αν το c_1 είναι 70, τότε η λύση παραμένει η ίδια.

Για Δc_3: $-5 = \Delta c_3 \leq \min\left\{\frac{5}{2}, \frac{10}{4}\right\}$

$\hat{x}_B = B^{-1}\underline{b} + \Delta b_k B^{-1}\underline{e}_k$

$\begin{pmatrix} 24 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} + \Delta b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\Delta b_1 \geq -24$

Αλλαγή b_1 ↑

Αλλαγή b_2 ↓

$\begin{pmatrix} 24 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} + \Delta b_2 \begin{pmatrix} -8 \\ 1.5 \\ -4 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \frac{-2}{1.5} \leq \Delta b_2 \leq \min\left\{\frac{24}{8}, \frac{8}{4}\right\}$

Αλλαγή b_3 ↓

$\begin{pmatrix} 24 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} + \Delta b_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -0.5 \\ 2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \max\left\{\frac{-24}{2}, \frac{-8}{2}\right\} < \Delta b_3 < \min\left\{\frac{-2}{-0.5}\right\}$

ΑΣΚΗΣΗ (ΘΕΜΑ)

$\max Z = 3x_1 + 1x_2 + 5x_3 + 3x_4$

$3x_1 + 1x_2 + 2x_3 = 30$ (Α) — x_5, x_6 περιθώριες στον Β, Γ περιορισμό

$2x_1 + 1x_2 + 3x_3 + 1x_4 \geq 15$ (Β) — x_7, x_8 τεχνητές στον Α, Β περιορισμό

$2x_2 + 3x_4 \leq 25$ (Γ)

$i = 1,2,3,4 \quad x_i \geq 0$

			3	1	5	3	0	0	-M	-M
B	C_b	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8
P_5	0	38 1/3	2.5	1/6	0	0	1	1/3	1.5	-1
P_3	5	15	1.5	0.5	1	0	0	0	0.5	0
P_4	3	8 1/3	0	2/3	0	1	0	1/3	0	0
	Z	100	4.5	3.5	0	0	0	1	2.5 +M	0 +M

$x_1 = 0, \ x_2 = 0, \ x_3 = 15, \ x_4 = \frac{25}{3}$

$C_3 \to 3$

1) Ποιά είναι η βέλτιστη λύση και ποιά η βέλτιστη τιμή του προβλήματος;
2) Πως θα επιδρούσε στη βέλτιστη λύση και βέλτιστη τιμή του μοντέλου μια αύξηση τριών μονάδων στον αντικειμενικό συντελεστή C_2 (αν ήταν δηλ. $C_2 = 4$);
3) Πως θα επιδρούσε στη βέλτιστη λύση και βέλτιστη τιμή του μοντέλου μια μείωση δύο μονάδων στον αντικειμενικό συντελεστή C_3 (αν ήταν δηλ. $C_3 = 3$);
4) Ποιά θα ήταν η βέλτιστη τιμή εάν το δεξιό μέλος του περιορισμού Γ μειωνόταν στις 5 μονάδες;
5) Ποιά θα ήταν η βέλτιστη τιμή εάν το δεξιό μέλος του περιορισμού Β αυξανόταν και έφτανε στις 50 μονάδες;

ΛΥΣΗ:

4) $-\Delta b_3 \cdot W_3$, μείωση στα έσοδα.
5) Οποιαδήποτε μεταβολή θα μας στείλει στο 0.

ΑΣΚΗΣΗ: Η εταιρεία επίπλων "SRUCE" κατασκευάζει στρόγγυλα (x_1) και τετράγωνα (x_2) τραπέζια κουζίνας. Όπως φαίνεται και στο π.γ.π. που ακολουθεί η παραγωγή των προϊόντων αυτών περιορίζεται, αφενός μεν από την διαθέσιμη πρώτη ύλη (m^3 ξύλου) αφετέρου δε από το υπάρχον εργατικό δυναμικό (ώρες):

max $20x_1 + 30x_2$ (συνολικά έσοδα - χ.μ.)
κάτω από τους περιορισμούς

$2x_1 + 5x_2 \le 180$ (διαθέσιμος χρόνος εργασίας - ώρες)
$3x_1 + 3x_2 \le 135$ (διαθέσιμες πρώτες ύλες - m^3 ξύλου)
$x_1, x_2 \ge 0$.

Μετά τη λύση του προβλήματος, με τη μέθοδο Simplex, καταλήξαμε στο (τελικό) tableau που ακολουθεί (X_3, X_4 περιθώριες μεταβλητές)

			20	30	0	0
B	C_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4
P_2	30	30	0	1	1/3	-2/9
P_1	20	15	1	0	-1/3	5/9
	Z	1200	0	0	10/3	40/9

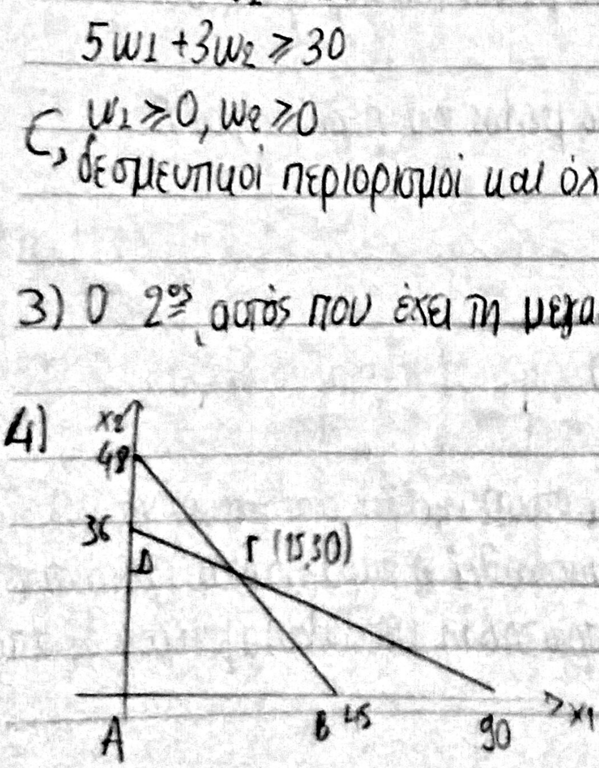
1) Να βρεθεί και να ερμηνευτεί το δυϊκό του. Ποιά είναι η άριστη λύση του;
2) Σε τι ποσό (-χ.μ.) ανέρχεται η συμβολή του καθενός των πόρων στα συνολικά έσοδα της εταιρείας;
3) Αν η εταιρεία μπορούσε να εξασφαλίσει την ύπαρξη επιπλέον μόνο από τους πόρους που χρησιμοποιεί ποιός θα έπρεπε να είναι αυτός;
4) Σε ποιό ποσό θα έπρεπε να ανερχόταν τα έσοδα από τα τετράγωνα τραπέζια, ώστε να μη παράγει καθόλου στρογγυλά;

min $180w_1 + 135w_2$
$2w_1 + 3w_2 \ge 20$ $\qquad w_1 = 10/3 \qquad 180 \cdot 10/3$
$5w_1 + 3w_2 \ge 30$ $\qquad w_2 = 40/9 \qquad 135 \cdot 40/9$
$w_1 \ge 0, w_2 \ge 0$ $\qquad u = 1200$

C, δεσμευτικοί περιορισμοί και όχι χαλαροί

3) Ο 2ος, αυτός που έχει τη μεγαλύτερη δυϊκή τιμή

4)



$-\frac{3}{3} < -\frac{c_1}{c_2} < -\frac{2}{5}$

$-\frac{c_1}{c_2} > -\frac{2}{5}$

$-\frac{20}{c_2} > -\frac{2}{5}$